

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHỔ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BOLTZMANN CHO CÁC CHẤT KHÍ CÓ ĐỘ NHỚT TRONG KHÔNG GIAN 3 CHIỀU

THE SPECTRAL METHOD FOR THE BOLTZMANN EQUATION
FOR GASES WITH VISCOSITY IN DIMENSION 3

ĐINH PHAN CAO NGUYÊN^(*)

TÓM TẮT: Được sự gợi ý và hướng dẫn bởi GS. Trần Minh Bình, chúng tôi đề xuất một phương pháp giải tích số đầu tiên cho phương trình Boltzmann cho các chất khí có ma sát giữa các phân tử trong không gian 3 chiều. Phần lớn các ứng dụng trong thực tế được biểu diễn trong không gian này. Các chất khí có ma sát giữa các phân tử khi va chạm thì giá trị hàm mật độ của chúng sẽ giảm dần về 0. Tốc độ giảm này tỷ lệ thuận với giá trị của ma sát. Kết quả này là tương tự cho trường hợp không gian 2 chiều [37].

Từ khóa: phương trình Boltzmann; giải tích số; phương pháp phổ; ma sát phân tử; hàm mật độ.

ABSTRACT: Suggested and supervised by Professor Tran Minh Binh, we suggested the first spectral method for the Boltzmann for gases with viscosity in dimension 3. Most of reality application can be presented in this dimension. The gases having friction between molecules will have density function value going down to 0. The decrease of speed have direct ratio with the value of friction. The result will be the same for dimension 2 [37].

Key words: Boltzmann equation; numerical analysis spectral method; molecules friction; density function.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương trình Boltzmann mô tả chuyển động của các phân tử của một chất khí trong đó sự tương tác của các phân tử là va chạm đàn hồi nhị phân [1-16, 37] có dạng:

$$\partial_\tau f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f), \quad x, v \in \mathbb{R}^3,$$

Trong đó $f(\tau, x, v)$ là một hàm không âm mô tả mật độ của chất khí có vận tốc v ở vị trí x tại thời gian $\tau > 0$. $Q(f, f)$ được gọi là toán tử va chạm, ta có thể biểu diễn Q như sau:

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{S^2} B(|v - v_*|, \theta) [(f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*))] dv_* d\omega, \quad (1.1)$$

Vận tốc của va chạm là các cặp (v, v_*) và (v', v'_*) có liên quan bởi:

$$v' = \frac{1}{2}(v + v_* + |v - v_*|\omega),$$

$$v'_* = \frac{1}{2}(v + v_* - |v - v_*|\omega),$$

Trong đó, σ là vector đơn vị của quá cầu S^2

$$S^2 = \{\omega \in \mathbb{R}^3, |\omega| = 1\}. \quad (1.2)$$

^(*) CN. Trường Đại học Nha Trang, nguyen.dpc.caohoc2017@ntu.edu.vn, Mã số: TCKH13-10-2019

Hạt nhân B của va chạm là một hàm số không âm mô tả chi tiết các tương tác nhị phân và phụ thuộc vào các đặc tính vật lý của chất khí. Hạt nhân có dạng:

$$B(|v - v_*|, \theta) = b_\alpha(\theta)|v - v_*|^\alpha, \quad \text{với } \alpha = (k - 5)/(k - 1).$$

Cụ thể, chúng tôi sẽ xem xét mô hình quả cầu cứng biến thiên (VHS) [25], đó là $b_\alpha(\theta) = C_\alpha$, với C_α là một hằng số dương. Trường hợp $\alpha = 0$ được gọi là khí Maxwellian. Trong khi với trường hợp $\alpha = 1$ là khí cầu cứng.

Phương trình Boltzmann có vị trí quan trọng trong nhiều ứng dụng, đặc biệt là ngành Vật lý học [17], [18], [27], [28], [29], [31]. Có hai phương pháp nghiên cứu chính để tính toán nghiệm cho phương trình Boltzmann là phương pháp kỹ thuật xác suất Monte Carlo [19] và Nanbu [32] và phương pháp sử dụng các kỹ thuật quang phổ trong không gian vận tốc.

Phương pháp kỹ thuật xác suất Monte Carlo là phương pháp lấy mẫu ngẫu nhiên có độ chính xác bậc 1 và thuộc lớp thuật toán không tắt định.

Phương pháp sử dụng các kỹ thuật quang phổ trong không gian vận tốc dựa trên các phương pháp quang phổ trong cơ học chất lỏng [24] và việc sử dụng các công cụ biến đổi Fourier trong phân tích phương trình Boltzmann [21] dựa trên phương pháp xấp xỉ Fourier - Galerkin của phương trình. Tổng quan về phương pháp và độ chính xác quang phổ đã được công bố trong [34], [35]. Phương pháp này lần đầu tiên được phát triển cho các phương trình động học trong [33], có độ chính xác phổ [30] và [34] và thuộc lớp thuật toán tắt định.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp phổ để giải phương trình Boltzmann trong các chất khí có độ nhớt/ma sát trong không gian 3 chiều. Phương trình này có dạng:

$$\partial_\tau f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) + \varepsilon f, \quad \text{trong đó } \varepsilon \text{ là hệ số nhớt.}$$

Đây là kết quả giải tích số đầu tiên cho phương trình Boltzmann trong các chất khí có độ nhớt/ma sát trong không gian 3 chiều. Kết quả của phương pháp này là tương tự trong không gian 2 chiều và trường hợp 2 đã được chúng tôi khảo sát trong [37].

2. NỘI DUNG

2.1. Phép chiếu phổ của Phương trình Boltzmann

Phương trình Boltzmann thuần nhất:

$$\partial_\tau f + fL(f) = Q^+(f, f) \quad (2.1)$$

với điều kiện ban đầu:

$$f(\tau = 0, x, v) = f_0(x, v) \quad (2.2)$$

Chúng tôi đã sử dụng thực tế là toán tử va chạm có thể được chia thành các phần tăng và giảm: $Q(f, f) = Q^+(f, f) - fL(f)$

Bằng cách biến đổi biến, ta viết lại [20, 37]:

$$Q^+(f, f) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(|g|, \theta) f(v') f(v'_*) dg d\omega, \quad (2.3)$$

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(|g|, \theta) f(v - g) dg d\omega, \quad (2.4)$$

với $g = v - v_*$, do đó:

$$v' = v - \frac{1}{2}(g - |g|\omega),$$

$$v'_* = v - \frac{1}{2}(g + |g|\omega). \quad (2.5)$$

Trong (2.1) đã định nghĩa miền của hàm mật độ f là không gian vận tốc $\mathbb{R}^3$, trong khi biến x chỉ hoạt động như một tham số và nó sẽ bị bỏ qua trong phần tiếp theo. Trong quá trình vận động, vì các đặc

tính vật lý chính chỉ phụ thuộc vào toán tử va chạm $Q(f, f)$, giải pháp trong (2.1) bảo tồn khối lượng, động lượng, năng lượng và thỏa mãn định lý H của Boltzmann.

Với $\mathcal{B}(0, R)$ là quả cầu tâm 0 bán kính R , sau đó, bằng cách bảo toàn năng lượng và động lượng, toán tử va chạm thỏa mãn điều kiện sau đây [20,37]:

Cho $Supp(f(v)) \subset \mathcal{B}(0, R)$

i) $Supp(f(v)) \subset \mathcal{B}(0, \sqrt{2}R)$,

ii) $Q(f, f)(v) = \int_{\mathcal{B}(0, 2R)} \int_{S^2} B(|v - v_*|, \theta) [(f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*))] dv_* d\omega$,
với $v', v_*, v - g \in \mathcal{B}(0, (2 + \sqrt{2})R)$.

Do đó, để viết một xấp xỉ quang phổ trong (2.1), chúng tôi xem xét hàm mật độ $f(v)$ trong vùng bị chặn $D_T = [-T, T]^3$ với $T \geq (2 + \sqrt{2})R$, giả sử $f(v) = 0$ trong $D_T \setminus \mathcal{B}(0, R)$ và mở rộng nó theo chu kỳ thành một vòng tuần hoàn trong D_T .

2.2. Thuật giải Phương trình Boltzmann bằng phương pháp phổ

Giá trị xấp xỉ của hàm f_N được biểu diễn bởi dưới dạng chuỗi Fourier cắt ngắn

$$f_N(v) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikv}, \quad (2.6)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{D_\pi} f(v) e^{-ikv} dv. \quad (2.7)$$

Phương trình phổ là phép chiếu của phương trình va chạm trong $\mathbb{P}^N$, với $\mathbb{P}^N$ là không gian vector $(2N + 1)^d$ chiều của các đa thức lượng giác có bậc tối đa N theo từng hướng, tức là:

$$\frac{\partial f_N}{\partial \tau} = P_N Q^R(f_N, f_N),$$

với P_N biểu thị phép chiếu trực giao trên $\mathbb{P}^N$ trong $L^2(D_\pi)$. Vì vậy, với $k = -N, \dots, N$, chúng ta có [22], [23], [37]:

$$\int_{[-\pi, \pi]^3} \left(\frac{\partial f_N}{\partial t} + f_N L(f_N) - Q^+(f_N, f_N) \right) e^{-ik \cdot v} dv = 0. \quad (2.8)$$

Bằng cách thay thế biểu thức (2.6) trong (2.3) và (2.4) chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned} f_N L(f_N) &= \sum_{l=-N}^N \sum_{m=-N}^N \hat{f}_l \hat{f}_m \hat{B}(l, m) e^{i(l+m) \cdot v}, \text{ và:} \\ Q^+(f_N, f_N) &= \sum_{l=-N}^N \sum_{m=-N}^N \hat{f}_l \hat{f}_m \hat{B}(l, m) e^{i(l+m) \cdot v}, \\ \text{với hạt nhân } \hat{B}(l, m) &\text{ cho bởi công thức: } \hat{B}(l, m) = \\ \int_{\mathcal{B}(0, 2R)} \int_{S^2} B(|g|, \theta) e^{-ig \cdot \frac{(l+m)}{2} - ig\omega \cdot \frac{(m-l)}{2}} dg d\omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sử dụng thuộc tính trực giao, chúng ta nhận được từ (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial \tau} + \sum_{l+m=k} \hat{f}_l \hat{f}_m \hat{B}(l, m) &= \\ \sum_{l+m=k} \hat{f}_l \hat{f}_m \hat{B}(l, m), k = -N, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.10)$$

với điều kiện ban đầu:

$$\hat{f}_k(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} f_0(v) e^{-ik \cdot v} dv. \quad (2.11)$$

2.3. Thuật toán quang phổ nhanh

Chúng ta sẽ xem xét riêng các mô hình va chạm trong không gian 3 chiều, đây là một trường hợp quan trọng cho các ứng dụng thực tế.

2.3.1. Tính toán các $\hat{B}(x, y)$

Chúng tôi ký hiệu $\lambda = 2/(3 + \sqrt{2})$, trong quả cầu không gian 3 chiều hạt nhân không phụ thuộc vào góc θ : $B = C_\alpha |g|^\alpha$, (2.10) có thể viết lại [20], [37]:

$$\begin{aligned} \hat{B}(l, m) &= \\ C_\alpha \int_{\mathcal{B}(0, 2\lambda\pi)} |g|^\alpha e^{-ig \cdot \frac{l+m}{2}} I_2(|g|, l-m) dg, \end{aligned} \quad (3.1)$$

với:

$$I_2(|g|, l-m) = \int_{S^2} e^{i|g|\omega \cdot \frac{l-m}{2}} d\omega.$$

2.3.2. Không gian 3 chiều

Cho $q = |g|(l - m)/2$. I_2 được tính lại như sau:

$$\begin{aligned} I_2(|g|, l - m) &= \int_{\mathbb{S}^2} e^{iq\omega} d\omega \\ &= 2\pi \int_0^\pi e^{i|q|\cos\theta} \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

Sử dụng hệ tọa độ cầu, với $\rho = |g|$, ta có:

$$\begin{aligned} \hat{B}(l, m) &= C_\alpha 8\pi^2 \int_0^{2\pi\lambda} \rho^{2+\alpha} \text{Sinc}\left(\frac{|l-m||g|}{2}\right) d\rho \int_0^\pi e^{-i|p|\rho\cos\theta} \sin\theta d\theta \\ &= C_\alpha 16\pi^2 \int_0^{2\pi\lambda} \rho^{2+\alpha} \text{Sinc}\left(\frac{|l-m|\rho}{2}\right) \text{Sinc}\left(\frac{|l+m|\rho}{2}\right) d\rho. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Với sự biến đổi của biến số $\rho = 2\lambda\pi r$ toán tử $\beta(l, m)$ có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \hat{B}(l, m) &= C_\alpha 16\pi^2 (2\lambda\pi)^{3+\alpha} \\ &\int_0^1 r^{2+\alpha} \text{Sinc}(\xi r) \text{Sinc}(\eta r) dr, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Trong đó: $\xi = |l + m|\lambda\pi, \eta = |l - m|\lambda\pi$. Để đơn giản ký hiệu chúng tôi giả định: $C_\alpha = (16\pi^2 (2\lambda\pi)^{3+\alpha})^{-1}$.

Toán tử có thể viết lại:

$$\hat{B}(l, m) = F_\alpha(\xi, \eta),$$

với: $F_\alpha(\xi, \eta) =$

$$\int_0^1 r^{2+\alpha} \text{Sinc}(\xi r) \text{Sinc}(\eta r) dr. \quad (3.5)$$

Từ (3.5) chúng ta dễ dàng chứng minh được các điều sau:

Cho $F_\alpha(\xi, \eta)$ được định nghĩa như (3.5); do đó:

$$\text{i) } F_\alpha(\xi, \eta) = F_\alpha(\eta, \xi);$$

$$\text{ii) Nếu } \alpha > -3 \text{ thì } |F_\alpha(\xi, \eta)| \leq F_\alpha(0, 0) = (3 + \alpha)^{-1};$$

$$\text{iii) Nếu } \alpha > -1 \text{ thì } |F_\alpha(\xi, \eta)| \leq [\xi\eta(1 + \alpha)]^{-1};$$

Đối với các giá trị nguyên của α , F_α có biểu thức phân tích rõ ràng. Với $\alpha = 0$ và $\alpha = 1$ chúng ta có:

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-1}^1 e^{i|q|\mu} d\mu = 4\pi \text{Sinc}(|q|) = \\ &4\pi \text{Sinc}\left(\frac{|g||l-m|}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{với: } \text{Sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}.$$

Cho $p = (l + m)/2$. (3.2) được tính lại như sau:

$$\begin{aligned} \hat{B}(l, m) &= C_\alpha 4\pi \int_{B(0, 2\lambda\pi)} |g|^\alpha \text{Sinc}\left(\frac{|l-m||g|}{2}\right) e^{-ip \cdot g} dg \end{aligned}$$

$$F_0(\xi, \eta) = \frac{p \sin(q) - q \sin(p)}{2\xi\eta pq}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} F_1(\xi, \eta) &= \\ &\frac{p^2(q \sin(q) + \cos(q)) - q^2(p \sin(p) + \cos(p)) - 4\xi\eta}{2\xi\eta pq}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{với } p = (\xi + \eta), q = (\xi - \eta).$$

Lưu ý, vì tích phân năm lần (2.9) để xác định $\hat{B}(l, m)$ đã được giảm xuống tích phân một chiều (3.5) với các giá trị không nguyên của α , giá trị của các toán tử có thể dễ dàng tính toán bằng số một công thức phương trình chính xác và được lưu trữ trong một mảng để bắt đầu.

3. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN VÀ KẾT LUẬN

3.1. Kết quả kiểm tra số

Với $\tau = q\Delta t$, $\Delta t > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \hat{f}_K(q\Delta t) &= \sum_{l, m=-N}^N (\hat{B}(l, m) - \\ &\hat{B}(l, m)) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t). \end{aligned}$$

Tính xấp xỉ:

$$\hat{f}_K(q\Delta t) = \frac{\hat{f}_K((q+1)\Delta t) - \hat{f}_K(q\Delta t)}{\Delta t}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \hat{f}_K((q+1)\Delta t) &= \hat{f}_K(q\Delta t) + \\ \Delta t \sum_{l+m=k, l,m=-N}^N (\hat{B}(l, m) - \\ \hat{B}(l, m)) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Đối với các chất khí có độ nhớt/ma sát ta có:

$$\begin{aligned} \hat{f}_K((q+1)\Delta t) &= \hat{f}_K(q\Delta t) + \\ \Delta t \sum_{l+m=k, l,m=-N}^N (\hat{B}(l, m) - \\ \hat{B}(l, m)) \hat{f}_l(q\Delta t) \hat{f}_m(q\Delta t) - \varepsilon \hat{f}_K(q\Delta t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

3.2. Kết quả kiểm tra số xét trong không gian 3 chiều

Chúng tôi sử dụng $N = 5, \Delta t = 0.5, v \in [-\pi, \pi]$, và

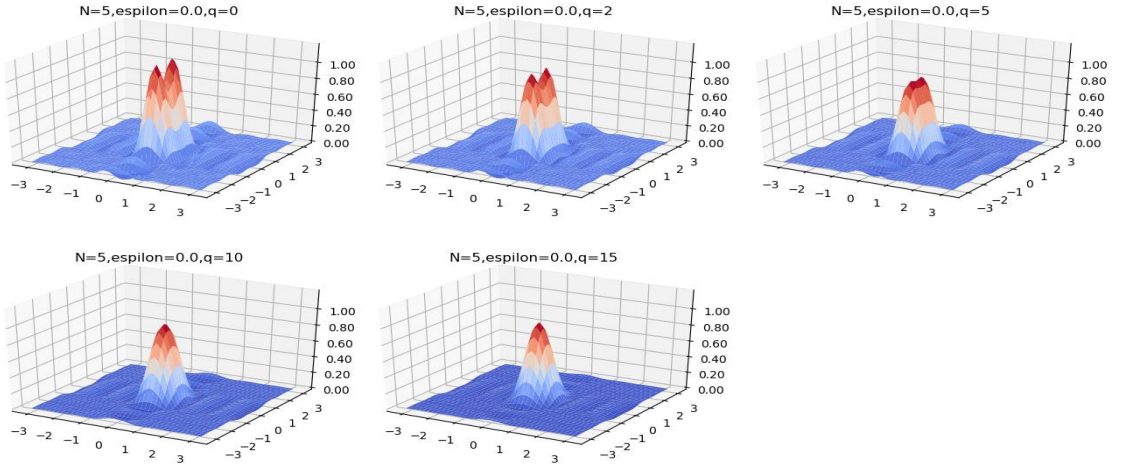
$$f(0, v) = \frac{1}{2(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} (e^{-\frac{|v-2\sigma e_1|^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{|v+2\sigma e_1|^2}{2\sigma^2}}),$$

với $d = 3, \sigma = \lambda \frac{\pi}{6}, D_\pi \in [-\pi, \pi]^3$.

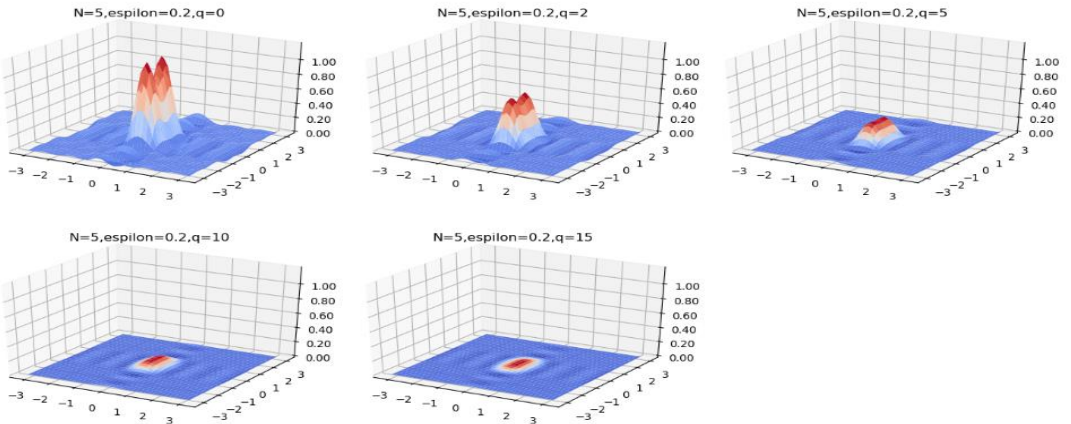
Cho $\alpha = 0, C_\alpha = \sqrt{2}/16\pi$, thay vào (3.4) ta có

$$\begin{aligned} \hat{B}(l, m) \\ = \sqrt{2}\pi(2\lambda\pi)^3 \int_0^1 r^2 \text{Sinc}(\xi r) \text{Sinc}(\eta r) dr \end{aligned}$$

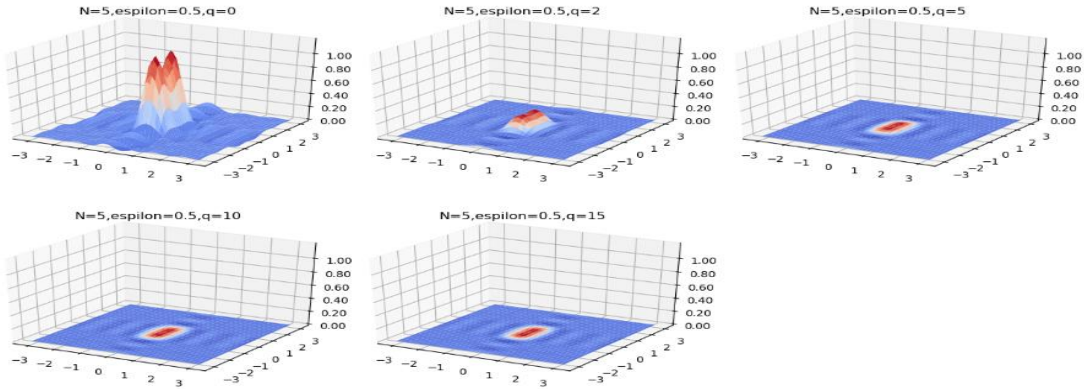
Cho các giá trị lần lượt của ε là 0, 0.1 và 0.5, chúng ta có các kết quả:



Hình 1. Hàm mật độ $f(v, \tau)$ với $\varepsilon = 0$



Hình 2. Hàm mật độ $f(v, \tau)$ với $\varepsilon = 0.2$



Hình 3. Hàm mật độ $f(v, \tau)$ với $\varepsilon = 0.5$

Nhận xét: tại thời điểm ban đầu $q = 0$ giá trị của hàm mật độ $f(v)$ là bằng nhau với cả 3 giá trị của ε và có giá trị xấp xỉ là 0.8. Tại các thời điểm lần lượt $q = 2, 5, 10, 15$ giá trị xấp xỉ tương ứng của $f(v)$ với $\varepsilon = 0.1$ lần lượt là 0.33, 0.15, 0.06, 0.00, và với $\varepsilon = 0.5$ lần lượt là 0.12, 0.00, 0.0, 0.0. Rõ ràng, giá trị

hàm mật độ của $f(v)$ với $\varepsilon = 0.5$ là nhỏ hơn và tốc độ giảm về 0 nhanh hơn so với $\varepsilon = 0.1$.

3.3. Kết luận

Với kết quả của thí nghiệm, chúng tôi thấy rằng, độ nhớt làm hàm mật độ khí nhỏ hơn, đây là điều chúng tôi mong đợi. Hàm mật độ khí sẽ giảm khi giá trị độ nhớt ε lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Germain, A. D. Ionescu, and M.-B. Tran. *Optimal local well-posedness theory for the kinetic wave equation*. arXiv preprint arXiv:1711.05587, 2017.
- [2] T. T. Nguyen and M.-B. Tran. *Uniform in time lower bound for solutions to a quantum boltzmann equation of bosons*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Available online 27 June 2018.
- [3] A. Soffer and M.-B. Tran. *On the dynamics of finite temperature trapped bose gases*. Advances in Mathematics, 325:533-607, 2018.
- [4] A. Soffer and M.-B. Tran. *On coupling kinetic and schrodinger equations*. Journal of Differential Equations, 265 (5):2243-2279, 2018.
- [5] S. Muralikrishnan, M.-B. Tran, T. Bui-Thanh. *An Iterative HDG Framework for Partial Differential Equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, 39 (2017), no. 5, S782–S808.
- [6] T. T. Nguyen and M.-B. Tran. *On the Kinetic Equation in Zakharov's Wave Turbulence Theory for Capillary Waves*. SIAM J. Math. Anal., 50(2):2020-2047, 2018.
- [7] S. Muralikrishnan, M.-B. Tran, T. Bui-Thanh. *An improved iterative HDG approach for partial differential equations*. Journal of Computational Physics, Volume 367, 15 August 2018, Pages 295-321.

- [8] S. Jin and M.-B. Tran. *Quantum hydrodynamic approximations to the nite temperature trapped bose gases*. Physica D: Nonlinear Phenomena, Volumes 380–381, 1 October 2018, Pages 45-57 .
- [9] M.-B. Tran. *Convergence to Equilibrium of Some Kinetic Models*. Journal of Differential Equations, Volume 255, Issue 3, 1 August 2013, Pages 405-440.
- [10] M. Escobedo and M.-B. Tran. *Convergence to equilibrium of a linearized quantum Boltzmann equation for bosons at very low temperature*. Kinetic and Related Models, 8(3):493-531, 2015.
- [11] I. M. Gamba, L. M. Smith, and M.-B. Tran. *On the wave turbulence theory for stratified flows in the ocean*. arXiv preprint arXiv:1709.08266, 2017.
- [12] R. Alonso, I. M. Gamba, and M.-B. Tran. *The Cauchy problem and BEC stability for the quantum Boltzmann-Condensation system for bosons at very low temperature*. arXiv preprint arXiv:1609.07467, 2016.
- [13] G. Craciun and M.-B. Tran. *A reaction network approach to the convergence to equilibrium of quantum boltzmann equations for bose gases*. arXiv preprint arXiv:1608.05438, 2016.
- [14] L. E. Reichl and M.-B. Tran. *A kinetic model for very low temperature dilute bose gases*. arXiv preprint arXiv:1709.09982, 2017.
- [15] M.-B. Tran, G. Craciun, L. M. Smith, and S. Boldyrev. *A reaction network approach to the theory of acoustic wave turbulence*, submitted.
- [16] A. Soffer and M.-B. Tran. *On the energy cascade of acoustic wave turbulence: Beyond Kolmogorov-Zakharov solutions*, arXiv preprint arXiv:1811.06951.
- [17] Dario Benedetto, Emanuele Caglioti, and Mario Pulvirenti, *A kinetic equation for granular media*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 31 (1997), 615–641. MR1471181 (98k:82145).
- [18] Erratum: “A kinetic equation for granular media”, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33 (1999), no. 2, 439–441. MR1700043 (2000f:82070).
- [19] G. A. Bird, *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Oxford Engineering Science Series, vol. 42, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994, 1994. MR1352466 (97e:76078).
- [20] L. Pareschi and B. Perthame, *A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations*, Transport Theory Statist. Phys., 25 (1996), pp. 369–383.
- [21] A. V. Bobyl’ev, *The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules*, Mathematical physics reviews, Vol. 7, Harwood Academic Publ., Chur, 1988, pp. 111–233. MR1128328 (92m:82112).
- [22] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [23] D. Gottlieb, and S.A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math. 26, SIAM, Philadelphia, 1977.

- [24] Claudio Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1988. MR0917480 (89m:76004).
- [25] G.A. Bird, *Molecular Gas Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [26] Carlo Cercignani, *Theory and application of the Boltzmann equation*, Elsevier, New York, 1975. MR0406273 (53:10064).
- [27] Carlo Cercignani, Reinhard Illner, and Mario Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Applied Mathematical Sciences, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1994. MR1307620 (96g:82046).
- [28] Pierre Degond and Brigitte Lucquin-Desreux, *The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case*, M3AS (1992), no. 2, 167–182. MR1167768 (93g:82083).
- [29] M. Escobedo and S. Mischler, *On a quantum Boltzmann equation for a gas of photons*, J. Math. Pures Appl. (2001), no. 9, 417–515. MR1831432 (2002j:82071).
- [30] Francis Filbet and Giovanni Russo, *High order numerical methods for the space nonhomogeneous Boltzmann equation*, J. Comput. Phys. 186 (2003), no. 2, 457–480. MR1973198 (2004c:82116).
- [31] P. A. Markowich, C. A. Ringhofer, and C. Schmeiser, *Semiconductor equations*, Springer-Verlag, Vienna, 1990.
- [32] Kenichi Nanbu, *Direct simulation scheme derived from the Boltzmann equation. I. Monocomponent gases*, J. Phys. Soc. Japan 52 (1983), 2042–2049.
- [33] Lorenzo Pareschi and Benoît Perthame, *A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations*, Transport Theory Statist. Phys. 25 (1996), no. 3-5, 369–382. MR1407541 (97j:82133).
- [34] Lorenzo Pareschi and Giovanni Russo, *Numerical solution of the Boltzmann equation. I. Spectrally accurate approximation of the collision operator*, SIAM J. Numer. Anal. 37 (2000), no. 4, 1217–1245. MR1756425 (2001g:65175).
- [35] *On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation*, Transport Theory Statist. Phys. 29 (2000), no. 3-5, 431–447. MR1770438 (2001c:82070).
- [36] Yves Pomeau, Minh-Binh Tran, *Statistical Physics of Non Equilibrium Quantum Phenomena*, Springer Books, 2018.
- [37] Đinh Phan Cao Nguyên, *Phương pháp phổ để giải số phương trình Boltzmann cho các chất khí có độ nhớt*, đã Bài đã được nhận đăng ở Chuyên san Khoa học Tự nhiên, Tạp chí Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

Ngày nhận bài: 02-12-2018. Ngày biên tập xong: 29-12-2018. Duyệt đăng: 21-01-2019