SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN KHOẢNG CÓ TRỄ TRONG KHÔNG GIAN THỨ TỰ

TRƯƠNG VĨNH AN*, NGUYỄN ANH TUẤN**, NGUYỄN ĐÌNH PHƯ***

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng kết quả của lí thuyết điểm bất động được giới thiệu trong [1] trong không gian các hàm khoảng được sắp xếp thứ tự để chứng minh tồn tại, duy nhất nghiệmcho lớp phương trình vi phân khoảng có trễ.

Từ khóa: phương trình vi phân khoảng; phương trình vi phân khoảng có trễ; Điều kiện co yếu.

ABSTRACT

On the existence and uniqueness of solution to interval-valued delay differential equations in partially ordered metric spaces

In this paper, we study the existence and uniqueness of solution to interval-valued delay differential equation in the setting of a generalized Hukuhara derivative and by using some recent results of fixed point of weakly contractive mappings on partially ordered sets.

Keywords: Interval-valued differential equations; Interval-valued delay differential equations; weakly contractive mapping; partially ordered space.

1. Giới thiệu

Phương trình vi phân giá trị khoảng là một công cụ thích hợp để mô hình các hệ động lực trong đó tính tất định hay tính mơ hồ thâm nhập khắp nơi. Nó được phát triển theo nhiều hướng lí thuyết và một số các ứng dụng trong nhiều bài toán thực tế khác đã được nghiên cứu (xem [8,11,12], [3,4,5,6,7,13]. Hiện nay, các kết quả về giải tích khoảng được giới thiệu một cách chi tiết bởi Stefanini, L.và Bede, B. [4]. Ngoài ra, phương trình vi-tích phân khoảng có trễ (xem [5]) cũng được đề cập.

Phương trình vi phân có trễ đóng một vai trò quan trọng trong nghiên cứu tính ứng dụng của một số mô hình thực tế (xem [2,9]). Do đó, trong bài báo này chúng tôi muốn sử dụng một số kết quả mới của định lí điểm bất động [1] để nghiên cứu cho lớp bài toán phương trình vi phân khoảng có trễ sau:

$$\begin{cases} D_{gH}X(t) = F(t, X(t), X_t), \\ X(t) = \varphi(t-a),\ t \in [a-\sigma, a], \end{cases} \tag{1.1}$$

* NCS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM, *Email: truongvinhan@gmail.com*

** PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

*** PGS TS, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TPHCM

trong đó, $D_{gH}X$ là đạo hàm Hukuhara tổng quát cho hàm khoảng X (được giới thiệu chi tiết trong mục 2). Hàm $F:[a,b]\times K_C(\mathbb{R})\times C_\sigma$ là hàm khoảng.

2. Một số kiến thức cơ bản

2.1. Một số định lí điểm bất động

Gần đây, việc mở rộng lí thuyết điểm bất động được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học với nhiều cách thức tiếp cận khác nhau, trong đó cách tiếp cận đáng chú ý nhất là dựa vào tính đơn điệu của hàm số trong không gian các tập được sắp xếp thứ tự. Trong [1], nhóm tác giả giới thiệu một số kết quả lí thuyết điểm bất động mới của ứng dụng điều kiện co yếu trong không gian các tập được sắp xếp thứ tự và sự tồn tại của nghiệm duy nhất cho lớp phương trình vi phân thường với điều kiện biên tuần hoàn cũng được nghiên cứu. Theo sau, chúng tôi trình bày thật ngắn gọn một số kết quả được nghiên cứu trong [1] và ứng dụng nghiên cứu phương trình vi phân khoảng.

Định nghĩa 2.1. [1] Ta gọi $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ là một hàm biến đổi khoảng cách nếu nó thỏa điều kiện theo sau

(i) ψ liên tục và không giảm;

(ii) $\psi(t)=0$ nếu và chỉ nếu $t=0$.

Định nghĩa 2.2. [1] Xét không gian mê tric đầy đủ $(\aleph,d)$ và hàm thực $f:\aleph\to\aleph$. Khi đó, f được gọi là co yếu nếu

$$\psi\big(d\big(f(x),f(y)\big)\big)\le\psi\big(d(x,y)\big)-\gamma\big(d(x,y)\big),\forall x,y\in\aleph,$$

trong đó, ψ và γ là hai hàm biến đổi khoảng cách.

Xét không gian được sắp xếp thứ tự $(\aleph,\le)$ và hàm $f:\aleph\to\aleph$. Ta nói rằng hàm f đơn điệu không giảm nếu $x\le y$ suy ra $f(x)\le f(y)$, trong đó $x,y\in\aleph$; hàm f đơn điệu không tăng nếu $x\le y$ suy ra $f(x)\ge f(y)$. Kết quả sau trình bày một số định lí điểm bất động mở rộng [1] và chú ý rằng hàm f không cần liên tục.

Định lí 2.1. [1] Xét không gian được sắp xếp thứ tự $(\aleph,\le)$ và giả sử có tồn tại mê tric d trong $\aleph$ sao cho $(\aleph,d)$ là không gian metric đầy đủ. Xét hàm $f:\aleph\to\aleph$ đơn điệu không giảm và thỏa

$\psi\big(d\big(f(x),f(y)\big)\big)\le\psi\big(d(x,y)\big)-\gamma\big(d(x,y)\big)$, với $x\ge y$, trong đó ψ và γ là hai hàm biến đổi khoảng cách. Giả sử rằng trong không gian $\aleph$ điều kiện sau thỏa: nếu dãy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ không giảm hội tụ về x thì $x_k\le x$ với mọi $k\in\mathbb{N}$ hoặc f liên tục. Khi đó, nếu có tồn tại $x_0\in\aleph$ sao cho $x_0\le f(x_0)$ thì f có điểm bất động.

Định lí 2.2. [1] Xét không gian được sắp xếp thứ tự $(\aleph,\le)$ và giả sử rằng có tồn tại metric d trong $\aleph$ sao cho $(\aleph,d)$ là không gian metric đầy đủ. Xét hàm $f:\aleph\to\aleph$ đơn điệu không giảm và thỏa bất đẳng thức trong Định lí 2.1. Giả sử rằng trong không gian $\aleph$ điều kiện sau thỏa: nếu dãy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ không tăng hội tụ về x thì $x\le x_k$ với mọi $k\in\mathbb{N}$ hoặc f liên tục. Khi đó, nếu có tồn tại $x_0\in\aleph$ sao cho $x_0\ge f(x_0)$ thì f có điểm bất động.

Định lí sau đây đảm bảo sự tồn tại và duy nhất của điểm bất động và hội tụ toàn cục của phương pháp xấp xỉ. Tức là, cho hàm $f:\aleph\to\aleph$ nếu $(\aleph,\le)$ là tập được sắp xếp thứ tự thì $\left(f^k(x)\right)_{x\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến điểm bất động của f với mọi $x\in\aleph$.

Định lí 2.3. Dưới những giả sử của Định lí 2.1 và Định lí 2.2, nếu mỗi cặp phần tử của $\aleph$ có chặn trên hoặc chặn dưới thì f có điểm bất động duy nhất. Hơn nữa, nếu x_0 là điểm bất động của f thì $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(x)=x_0$ với mọi $x\in\aleph$.

2.2. Kiến thức cơ bản của giải tích khoảng

Trước hết, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản về tích phân và vi phân hàm khoảng.

Cho $K_C(R)$ là tập các khoảng compact khác rỗng. Nếu $A=\left[\underline{A},\overline{A}\right], B=\left[\underline{B},\overline{B}\right]\in K_C(R)$ thì phép cộng Minkowski và nhân vô hướng được định nghĩa bởi $A+B=\left[\underline{A},\overline{A}\right]+\left[\underline{B},\overline{B}\right]=\left[\underline{A}+\underline{B},\overline{A}+\overline{B}\right]$ và $\lambda A=\lambda\left[\underline{A},\overline{A}\right]=\begin{cases}\left[\lambda\underline{A},\lambda\overline{A}\right] & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ \left[\lambda\overline{A},\lambda\overline{A}\right] & \lambda>0\end{cases}$

Nếu $\lambda=-1$ thì $-A:=(-1)\,\mathrm{A}=(-1)\left[\underline{A},\overline{A}\right]=\left[-\overline{A},-\underline{A}\right]$. Tổng quát, $A+(-A)\ne 0$. Hiệu Minkowski là $A-B=A+(-1)B=\left[\underline{A}-\overline{\mathrm{B}},\overline{A}-\underline{B}\right]$. Với các phép toán trên, $K_C(R)$ là một không gian nửa tuyến tính.

Hiệu Hukuhara tổng quát. Hiệu Hukuhara tổng quát của hai khoảng được định nghĩa như sau

$$\left[\underline{A},\overline{A}\right]\ominus_g\left[\underline{B},\overline{B}\right]=\left[\min\left\{\underline{A}-\underline{B},\overline{A}-\overline{B}\right\},\max\left\{\underline{A}-\underline{B},\overline{A}-\overline{B}\right\}\right]$$

Ta định nghĩa độ rộng của khoảng A là $w(A)=\overline{A}-\underline{A}$. Khi đó,

$$A\ominus_g B=\begin{cases}(i)A=B+C & w(A)\ge w(B)\\ (ii)B=A+(-1)C & w(A)\le w(B)\end{cases}$$

Mêtric Hausdorff-Pompeiu H trên $K_C(R)$ được định nghĩa như sau:

$$H[A,B] = \max\left\{\left|\underline{A} - \underline{B}\right|, \left|\overline{A} - \overline{B}\right|\right\} \qquad (2.1)$$

Các tính chất khác liên quan tới các phép toán trên $K_C(R)$ xem S. Markov[7], và khoảng cách Hausdorff-Pompeiu H xem L. Stefanini và B. Bede [4]. Ta nhận thấy rằng $(K_C(R), H)$ là không gian mê tric địa phương đầy đủ, tách được.

Nhận xét 2.1. Nếu $\left(X^m\right)_{m \in N} \subset K_C(R)$ và $A \in K_C(R)$ thì $X^m \to X$ khi $m \to \infty$ nếu và chỉ nếu $X^m\ !_g\ A \to X\ !_g\ A$ khi $m \to \infty$.

Cho $X \in K_C(R)$, ta xét hai quan hệ thứ tự riêng trên $K_C(R)$:

Định nghĩa 2.1. Cho $X, Y \in K_C(R)$. Ta nói $X \circ Y \left(X \pm Y\right)$ nếu và chỉ nếu $\underline{X} \le \underline{Y}$ và $\overline{X} \le \overline{Y}$ ($\underline{X} \ge \underline{Y}$ và $\overline{X} \ge \overline{Y}$). Ta nói $(X_k)_{k \in N} \subseteq K_C(R)$ là dãy không giảm nếu $X_k \circ X_{k+1}, \forall k \in N$. Xét hàm khoảng $X, Y : [a,b] \to K_C(R)$. Quan hệ thứ tự riêng $\circ$ có thể mở rộng cho không gian các hàm khoảng như sau:

$X \circ Y$ nếu và chỉ nếu $\underline{X}(t) \le \underline{Y}(t)$ và $\overline{X}(t) \ge \overline{Y}(t)$, $\forall t \in [a,b]$.

Cho $C([a,b], K_C(R))$ tập các hàm khoảng từ [a,b] vào $K_C(R)$ liên tục. Khi đó, $C([a,b], K_C(R))$ là không gian mê tric đầy đủ với mêtric tương ứng $H_C[X,Y] = \left\|X\ !_g\ Y\right\|_C$, trong đó $\left\|X\right\|_C := \sup_{a \le t \le b} H\left[X(t), 0\right]$.

Đạo hàm Hukuhara [4]

Cho $X : [a,b] \to K_C(\square)$ hàm khoảng và $t_0 \in [a,b]$. Ta định nghĩa $X'(t_0) \in K_C(\square)$ (nếu tồn tại) $D_{gH} X(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{X(t_0 + h)\ !_g\ X(t_0)}{h}$ (2.2)

Ta gọi $X'(t_0)$ là đạo hàm Hukuhara tổng quát (viết tắt gH-derivative) của X tại t_0.

Cho $X : [a,b] \to K_C(\square)$ là hàm khoảng thỏa $X(t) = [\underline{X}(t), \overline{X}(t)]$, $\underline{X}$ and $\overline{X}$ khả tích Riemann trên [a,b]. Khi đó, ta định nghĩa $\int_a^b X(t)dt$ bởi

$$\int_a^b X(t)dt = \left[\int_a^b \underline{X}(t)dt, \int_a^b \overline{X}(t)dt\right] \qquad (2.3)$$

và X gọi là khả tích Riemann trên [a,b]. Nếu $X : [a,b] \to K_C(\square)$ là hàm khoảng thỏa $X(t) = [\underline{X}(t), \overline{X}(t)]$ và $\underline{X}$ và $\overline{X}$ là khả tích Lebesgue trên [a,b] thì X được gọi là khả tích Lebesgue trên [a,b] và tích phân Lebesgue $\int_a^b X(t)dt$ cũng được định nghĩa bởi (2.3).

3. Kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho dạng tổng quát của phương trình khoảng có trễ bằng cách sử dụng các kết quả gần đây của định lí điểm bất động cho ánh xạ co yếu trên tập quan hệ thứ tự. Với số dương σ, ta kí hiệu C_σ là không gian $C([-\sigma,0],K_C(\mathbb{R}))$ được trang bị mê tric $H_\sigma\left[X,Y\right]=\sup\limits_{t\in[-\sigma,0]} H\left[X(t),Y(t)\right]$. Đặt $I=[a,a+p], J=[a-\sigma,a]\cup I=[a-\sigma,a+p]$. Khi đó, với mỗi $t\in I$, ta kí hiệu mỗi phần tử của C_σ được định nghĩa bởi $X_t(s)=X(t+s)$, $s\in[-\sigma,0]$ là X_t. Hàm khoảng $X:\left[a,b\right]\to K_C\left(\mathbb{R}\right)$ được gọi là w-tăng (w-giảm) trên $\left[a,b\right]$ khi hàm thực $t\mapsto w\left(X(t)\right)$ không giảm (không tăng) trên $\left[a,b\right]$. Nếu hàm khoảng X thỏa w-tăng hoặc w-giảm trên $\left[a,b\right]$ thì ta nói X w-đơn điệu trên $\left[a,b\right]$.

Phương trình tích phân khoảng có trễ:

Xét phương trình tích phân khoảng có trễ sau:

$$\begin{cases} X(t)=\varphi(t-a), \quad t\in[a-\sigma,a], \\ X(t)\ominus_g \varphi(0)=\int\limits_a^t F(s,X(s),X_s)ds, \quad t\in[a,a+p], \end{cases} \tag{3.1}$$

với $\sigma>0,\alpha\in(0,1)$. Ta nói hàm khoảng liên tục $X:[a-\sigma,a+p]\to K_C(\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình tích phân có trễ (3.1) nếu nó thỏa phương trình (3.1). Giả sử $X\in C([a,a+p],K_C(\mathbb{R}))$ là w-đơn điệu trên $[a,a+p]$ và thỏa (3.1). Ta chú ý rằng hàm $Y(t):=X(t)\ominus_g \varphi(0)$ có thể tạo hai nghiệm của (3.1): một nghiệm duy nhất w-tăng của (3.1) và một nghiệm duy nhất w-giảm của (3.1) trên [a,a+p]. Đặc biệt, (3.1) có thể viết lại

$$\begin{cases} X(t)=\varphi(t-a), t\in[a-\sigma,a], \\ X(t)=\varphi(0)+\int\limits_a^t F(s,X(s),X_s)ds, \quad t\in[a,a+p], \end{cases} \tag{3.2}$$

nếu $X\in C([a,b],K_C(\mathbb{R}))$ là w-tăng trên [a,a+p];

Và viết lại ở dạng

$$\begin{cases} X(t)=\varphi(t-a), t\in[a-\sigma,a], \\ X(t)=\varphi(0)\ominus\int\limits_a^t F(s,X(s),X_s)ds, \quad t\in[a,a+p], \end{cases} \tag{3.3}$$

nếu $X\in C([a,b],K_C(\mathbb{R}))$ là w-giảm trên [a,a+p].

Định nghĩa 3. Một hàm khoảng w-đơn điệu $X^L \in C([a,b], K_C(\square))$ là nghiệm dưới của (3.1) nếu

$$\begin{cases} X^L(t) \,!_g\, \varphi(0) \,°\, \int_a^t F(s, X^L(s), X_s^L)ds, \quad t \in [a, a+p], \\ X^L(t) = \xi(t-a) \,°\, \varphi(t-a), t \in [a-\sigma, a], \end{cases} \qquad (3.4)$$

với $\xi(t-a) \in C_\sigma$. Một hàm khoảng w-đơn điệu $X^U \in C([a,b], K_C(\square))$ là nghiệm trên của (3.1) nếu nó thỏa các bất đẳng thức ngược lại của (3.4).

Tiếp theo, với $k > 0$, ta xét B_k là tập các hàm khoảng liên tục

$X \in C([a-\sigma, a+p], K_C(\square))$ thỏa $X(t) = \varphi(t-a)$ trên $[a-\sigma, a]$

và $\sup\limits_{t\in[a-\sigma,a+p]} \{H[X(t), \mathbf{0}]\exp(-kt)\} < \infty$. Trên B_k ta định nghĩa mê tric sau

$$H_k[X,Y] = \sup_{t\in[a-\sigma,a+p]} \{H[X(t), Y(t)]\exp(-kt)\}, \quad X, Y \in C([a-\sigma, a+p], K_C(\square)),$$

(3.5)

Trong đó $k > 0$ đủ lớn thỏa $(1/k^\alpha) < 1$. Mê tric (3.5) tương đương với mê tric H vì $H_k(X,Y) \le H(X,Y) \le \exp(k(a+p))H_k(X,Y)$ vớimọi $X, Y \in C([a-\sigma, a+p], K_C(\square))$.

Hơn nữa, $(C([a-\sigma, a+p], K_C(\square)), H_k)$ là không gian mê tric đầy đủ.

Định lí 3.1. Cho $F \in C([a,b] \times K_C(\square) \times C_\sigma, K_C(\square))$ và giả sử $F(t, A, B)$ không giảm theo A,B với mỗi $t \in [a,b]$, nghĩa là, nếu $A \pm C$ and $B \pm D$ thì $F(t,A,B) \pm F(t,C,D)$. Hơn nữa, giả sử các điều kiện sau được thỏa:

(A1) tồn tại một nghiệm dưới w-đơn điệu $X^L \in C([a,b], K_C(\square))$ cho bài toán (3.1).

(A2) $F(t,A,B)$ là co yếu với những phần tử so sánh, tức là, với các hàm khoảng cách T_1 và T_2, bất đẳng thức sau đúng

$$\mathrm{T}_1(H[F(t,A,B), F(t,C,D)]) \le [\mathrm{T}_1(H[A,C]) + \mathrm{T}_1(H_\sigma[B,D])] - [\mathrm{T}_2(H[A,C]) + \mathrm{T}_2(H_\sigma[B,D])],$$

nếu $A \pm C$ và $B \pm D$ và $t \in [a, a+p]$. Khi đó, tồn tại một nghiệm duy nhất w- đơn điệu X cho bài toán (3.1) trên khoảng $[a-\sigma, \mathrm{T}]$, với $\mathrm{T} \le a+p$.

Chứng minh. Đặt $\mathrm{X}(t) := X(t) \,!_g\, \varphi(0), t \in [a-\sigma, a+p]$. Ta định nghĩa toán tử $\square : C([a-\sigma, a+p], K_C(\square)) \to C([a-\sigma, a+p], K_C(\square))$ xác định bởi

$$(\square\, \mathrm{X})(t) = \begin{cases} \varphi(t-a) \,!_g\, \varphi(0), t \in [a-\sigma, a], \\ \int_a^t F(s, X(s), X_s)ds, \quad t \in [a, a+p]. \end{cases}$$

Ta kiểm tra điều kiện trong Định lí 2.1. Thật vậy, lấy $X \pm Y$ trên $[a-\sigma, a+p]$ $(X_s \pm Y_s, \forall s \in [a, a+p])$ và $t \in [a-\sigma, a]$, khi đó

$(\square\ \mathrm{X})(t) = \varphi(t-a) !_g\ \varphi(0) = (\square\ \mathrm{Y})(t)$, với $t \in [a, a+p]$,

$$(\square\ \mathrm{X})(t) = \int_a^t F(s, X(s), X_s)ds \pm \int_a^t F(s, Y(s), Y_s)ds = (\square\ \mathrm{Y})(t).$$

$\square\ \mathrm{X} \pm \square\ \mathrm{Y}$ mỗi khi $X \pm Y$ trên $[a-\sigma, a+p]$, và do đó toán tử $\square$ không giảm. Bây giờ, điều kiện (A2) cho thấy

$$H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)] \le H[X(t), Y(t)] + H_\sigma[X_t, Y_t], \qquad (3.6)$$

với mọi $X \pm Y$ và với $t \in [a, a+p]$. Thật vậy, từ (A2) ta được

$$\mathrm{T}_1\big(H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)]\big) \le \mathrm{T}_1(H[X(t), Y(t)]) + \mathrm{T}_1(H_\sigma[X_s, Y_s]), \qquad (3.7)$$

với mọi $X \pm Y$. Nếu bất đẳng thức (3.6) không đúng, thì với mọi $X \pm Y$ ta có $H[X(t), Y(t)] + H_\sigma[X_t, Y_t] < H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)]$.

Khi đó, vì T_1 không giảm, nên với mọi $X \pm Y$ ta có

$$\mathrm{T}_1(H[X(t), Y(t)]) + \mathrm{T}_1(H_\sigma[X_t, Y_t]) \le \mathrm{T}_1(H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)]).$$

Do đó, từ (3.7), $\mathrm{T}_1(H[X(t), Y(t)]) + \mathrm{T}_1(H_\sigma[X_t, Y_t]) = \mathrm{T}_1(H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)])$, với mọi $X \pm Y$. Từ (A2), $0 \le -\mathrm{T}_2(H[X(t), Y(t)]) + \mathrm{T}_2(H_\sigma[X_t, Y_t])$, suy ra

$$\mathrm{T}_2(H[X(t), Y(t)]) + \mathrm{T}_2(H_\sigma[X_t, Y_t]) = 0.$$

Khi T_2 là một hàm khoảng cách thay đổi, ta có $H[X(t), Y(t)] = H[X_t, Y_t] = 0$ với mọi $X \pm Y$. Điều này mâu thuẫn, tức là, $H[F(t, X(t), X_t), F(t, Y(t), Y_t)] = 0$. Vậy bất đẳng thức (2.6) đúng. Tiếp theo, với $X \pm Y$, nếu $t \in [a-\sigma, a]$, $H[(\square\ \mathrm{X})(t), (\square\ \mathrm{Y})(t)] = H[\varphi(t-a) !_g\ \varphi(0), \varphi(t-a) !_g\ \varphi(0)] = 0$, và nếu $t \in [a, a+p]$,

$$H[(\square\ \mathrm{X})(t), (\square\ \mathrm{Y})(t)] = H\Big[\int_a^t F(s, X(s), X_s)ds, \int_a^t F(s, Y(s), Y_s)ds\Big]$$

$$\le \int_a^t \Big(H[X(s), Y(s)] + \sup_{\theta \in [s-\sigma, s]} H[X(\theta), Y(\theta)]\Big)ds.$$

Từ (3.5) suy ra $H[X(s), Y(s)] \le H_k(X, Y)e^{ks}$ với mọi $s \ge a - \sigma$.

Vậy $\sup_{\theta \in [s-\sigma, s]} H[X(\theta), Y(\theta)] \le H_k(X, Y)e^{ks}$ với mọi $s \ge a$. Hơn nữa, với mỗi $t \ge a$, ta được:

$$H[(\square\ \mathrm{X})(t),(\square\ \mathrm{Y})(t)] \le \int_a^t \left(H_k[X,Y]e^{ks} + H_k[X,Y]e^{ks}\right)ds$$

và $H_k[\square\ \mathrm{X},\square\ \mathrm{Y}] \le H_k[X,Y] \sup\limits_{t\in[a,a+p]} \int_a^t e^{k(s-t)}ds \le \dfrac{1-\exp(-k(a+p))}{k} H_k[X,Y].$

Vậy

$$\mathrm{T}_1(H_k[\square\ \mathrm{X},\square\ \mathrm{Y}]) \le \mathrm{T}_1\left(\frac{1-\exp(-k(a+p))}{k} H_k[X,Y]\right)$$

$$= \mathrm{T}_1(H_k[X,Y]) - \left[\mathrm{T}_1(H_k[X,Y]) - \mathrm{T}_1\left(\frac{1-\exp(-k(a+p))}{k} H_k[X,Y]\right)\right].$$

Khi ấy, nếu $\mathrm{T}_2(t) = \mathrm{T}_1(t) - \mathrm{T}_1(\dfrac{1-\exp(-k(a+p))}{k} t)$ thì

$$\mathrm{T}_1(H_k[\square\ \mathrm{X},\square\ \mathrm{Y}]) \le \mathrm{T}_1(H_k[X,Y]) - \mathrm{T}_2(H_k[X,Y]),$$

với mọi $X \pm Y$. Cuối cùng, sử dụng sự tồn tại của nghiệm dưới, ta kiểm tra X thỏa $\mathrm{X}^L \circ \square\ \mathrm{X}^L$. Thực vậy, vì $X^L(t) = \xi(t-a) \circ \varphi(t-a)$, với $t\in[a-\sigma,a]$, và với $t\in[a,a+p]$, $X^L(t) !_g\ \varphi(0) \circ \int_a^t F(s,X^L(s),X_s^L)ds$. Sau đó

$$\begin{cases} \mathrm{X}^L(t) := X^L(t) !_g\ \varphi(0) \circ\ \varphi(t-a) !_g\ \varphi(0) = \square\ \mathrm{X}^L(t), t\in[a-\sigma,a], \\ \mathrm{X}^L(t) \circ \int_a^t F(s,X^L(s),X_s^L)ds = \square\ \mathrm{X}^L(t), \quad t\in[a,a+p]. \end{cases}$$

Khi toán tử $\square$ thỏa tất cả các giả thiết của Định lí 2.1, $\square$ có một điểm bất động trong $C([a-\sigma,a+p],K_C(\square))$. Hơn nữa, vì mỗi cặp hàm khoảng trong $C([a-\sigma,a+p],K_C(\square))$ có một chặn trên, áp dụng Định lí 2.3 ta suy ra toán tử $\square$ có duy nhất một điểm bất động X và X là nghiệm duy nhất của (3.1).

Nhận xét 3.1. Kết luận của Định lí 3.1 vẫn đúng nếu sự tồn tại của một nghiệm dưới $w-$ đơn điệu của bài toán (3.1) được thay thế bởi sự tồn tại của một nghiệm trên $w-$ đơn điệu của bài toán (3.1).

Phương trình vi phân khoảng có trễ:

Xét phương trình vi phân khoảng có trễvới điều kiện đầu:

$$\begin{cases} D_{gH}X(t) = F(t,X(t),X_t), \\ X(t) = \varphi(t-a), t\in[a-\sigma,a] \end{cases} \tag{3.8}$$

trong đó $F:[a,b]\times K_C(\square)\times C_\sigma \to K_C(\square)$, $\varphi\in C_\sigma$. Kí hiệu $C^1([a,b],K_C(\square))$ là không gian các hàm giá trị khoảng khả vi liên tục với đạo hàm Hukuhara tổng quát.

Bổ đề 3.1. Giả sử rằng $F \in C\left(\left[a,b\right]\times K_C\left(\mathbb{R}\right)\times C_\sigma, K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Một hàm giá trị khoảng w-đơn điệu $X \in C\left(\left[a,b\right], K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ là một nghiệm của bài toán giá trị đầu (3.8) khi và chỉ khi X thỏa mãn phương trình tích phân khoảng trễ (3.1).

Định nghĩa 3.2. Cho $X:\left[a-\sigma, a+p\right]\to K_C\left(\mathbb{R}\right)$ là một hàm khả vi Hukuhara tổng quát giá trị khoảng w-tăng (w-giảm) trên $\left[a,a+p\right]$. Nếu X và đạo hàm của nó thỏa mãn bài toán (3.8), ta nói rằng X là một (i)- nghiệm ((ii)-nghiệm) của bài toán (3.8).

Định nghĩa 3.3. Một hàm $X^L \in C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^{1,F}\left(\left[a,a+p\right], K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ là một (i)-nghiệm dưới của (3.8) nếu

$$\begin{cases} D_{gH}X^L(t)\circ\ F\left(t, X^L(t), X_t^L\right), t\in\left[a,a+p\right] \\ X^L(t)=\xi(t-a)\circ\ \varphi(t-a),\ t\in\left[a-\sigma,a\right] \end{cases} \tag{3.9}$$

Trong đó X^L w-tăng trên $\left[a,a+p\right]$ và $\xi(t-a)\in C_\sigma$.

Một hàm $X^U \in C\left(\left[a-\sigma,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^1\left(\left[a,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ là một (i)-nghiệm của (3.8) nếu nó thỏa mãn các bất đẳng thức ngượccủa (3.9).

Tương tự, ta có thể định nghĩa (ii)-nghiệm dưới và (ii)-nghiệm trên của (3.8).

Định nghĩa 3.4. Một hàm $Y^U \in C\left(\left[a-\sigma,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^1\left(\left[a,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ là một (ii)-nghiệm trên của (3.8) nếu

$$\begin{cases} D_{gH}X^U(t)\pm\ F\left(t,Y^U(t),Y_t^U\right),\ t\in\left[a,b\right] \\ Y^U(t)=\psi(t-a)\pm\ \varphi(t-a),\ t\in\left[a-\sigma,a\right], \end{cases} \tag{3.10}$$

Trong đó Y^U là w-tăng và $\psi(t-a)\in C_\sigma$.

Một hàm $Y^L \in C\left(\left[a-\sigma,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^1\left(\left[a,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ là một (ii)-nghiệm dưới của (3.8) nếu nó thỏa mãn các bất đẳng thức ngược của (3.10).

Định lí 3.2. Giả sử rằng $F\in C\left(\left[a,b\right]\times K_C\left(\mathbb{R}\right)\times C_\sigma, K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ thỏa mãn điều kiện (A2) và $F(t,A,B)$ không giảm theo A,B với mỗi $t\in\left[a,b\right]$, nghĩa là, nếu $A\pm\ C$ và $B\pm\ D$ thì $F(t,A,B)\pm\ F(t,C,D)$. Hơn nữa, giả sử một trong các điều kiện sau được thỏa mãn :

(A3) tồn tại một (i)-nghiệm dưới

$X^L \in C\left(\left[a-\sigma,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^1\left(\left[a,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ (một (i)-nghiệm trên

$X^U \in C\left(\left[a-\sigma,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)\cap C^1\left(\left[a,a+p\right],K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$) của bài toán (3.8) ;

(A4) tồn tại một (ii)-nghiệm dưới

$Y^L \in C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right) \cap C^1\left(\left[a, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right)$ (một (ii)-nghiệm trên

$Y^U \in C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right) \cap C^1\left(\left[a, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right)$ của bài toán (3.8)

và $\int_a^t \mathrm{w}\left(F\left(s, X\left(s\right), X_s\right)\right) ds \le \mathrm{w}\left(\varphi\left(0\right)\right),\ \forall t \in \left[a, a+p\right]$.

Khi đó, tồn tại duy nhất một (i)-nghiệm X của bài toán (3.8) với điều kiện (A3) và một (ii)-nghiệm Y của bài toán (3.8) với điều kiện (A4) trong các khoảng $\left[a-\sigma, \mathrm{T}\right]$ nào đó, với $\mathrm{T} \le a+p$.

Chứng minh. Vì cách chứng minh hai trường hợp là tương tự nên ta chỉ xét trường hợp của điều kiện (A4). Tương tự như chứng minh của Định lí 3.1, ta định nghĩa toán tử $\mathrm{P} : C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right) \to C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\square\right)\right)$ bởi

$$\left(\mathrm{P}Y\right)\left(t\right) = \begin{cases} \varphi\left(t-a\right), t \in \left[a-\sigma, a\right], \\ \varphi\left(0\right) ! \displaystyle\int_a^t F\left(s, Y\left(s\right), Y_s\right) ds, t \in \left[a, a+p\right]. \end{cases}$$

Theo (A4), hiệu Hukuhara trên tồn tại với $t \in \left[a, a+p\right]$. Bây giờ, với $Y \le Z$,

$$\left(\mathrm{P}Y\right)\left(t\right) = \varphi\left(0\right) !\ (-1)\int_a^t F\left(s, Y\left(s\right), Y_s\right) ds \le \varphi\left(0\right) !\ (-1)\int_a^t F\left(s, Z\left(s\right), Z_s\right) ds$$

$$= \left(\mathrm{P}Z\right)\left(t\right), t \in \left[a, a+p\right],$$

nó giữ toán tử P không giảm. Vì F thỏa mãn (A2), ta có

$$H\left[F\left(t, Y\left(t\right), Y_t\right), F\left(t, Z\left(t\right), Z_t\right)\right] \le H\left[Y\left(t\right), Z\left(t\right)\right] + H_\sigma\left[Y_t, Z_t\right].$$

Do đó, nếu $Y \le Z$ thì $H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right] \le \left(1/k^\alpha\right) H_k\left[Y, Z\right]$ và vì vậy

$$\mathrm{T}_1\left(H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right) \le \mathrm{T}_1\left(H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right) - \mathrm{T}_2\left(H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right),$$

trong đó $\mathrm{T}_2\left(H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right) = \mathrm{T}_1\left(H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right) - \mathrm{T}_1\left(\left(1/k^\alpha\right) H_k\left[\mathrm{P}Y, \mathrm{P}Z\right]\right)$. Cuối cùng, sử dụng sự tồn tại của (ii)-nghiệm dưới và Bổ đề 3.1,ta có

$$Y^L\left(t\right) = \psi\left(0\right) !\ (-1)\int_a^t D_{gH} Y^L\left(s\right) ds \le \varphi\left(0\right) ! \int_a^t F\left(s, Y^L\left(s\right), Y_s^L\right) ds$$

$$= \left(\mathrm{P}Y^L\right)\left(t\right), t \in \left[a, a+p\right].$$

Vì vậy, $Y^L \leq \mathrm{P}Y^L$. Vì toán tử P thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lí 2.1, P có một điểm bất động trong $C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Hơn nữa, vì mỗi cặp hàm giá trị khoảng trong $C\left(\left[a-\sigma, a+p\right], K_C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ có một chặn trên, áp dụng Định lí 2.3 ta suy ra toán tử P có duy nhất một điểm bất động Y và Y là nghiệm duy nhất của (3.8). Chứng minh hoàn tất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Harjani, K. Sadarangani (2010), "Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations", *Nonlinear Anal*, 72, pp.1188–1197.
2. Hale, J. K. (1977), "Theory of Functional Differential Equations", *Springer, NewYork.*
3. Lakshmikantham V., Bhaskar, TG & Devi, JV (2006), *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Scientific Publisher, UK.
4. Stefanini, L. & Bede, B. (2009), "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* 71, pp. 1311-1328.
5. L.T.Q. Quang, N. V. Hoa, N. D. Phu, T. T. Tung, "Existence of extremal solutions for interval-valued functional integro-differential equations", *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* (Preprint).
6. Malinowski, M.T. (2012), "Interval Cauchy problem with a second type Hukuhara derivative", *Information Sciences* 213, pp.94-105.
7. Markov, S. (1979), "Calculus for interval functions of a real variables", *Computing* 22, pp. 325-337.
8. Chalco-Cano, Y., Rufian-Lizana, A., Roman-Flores H. & Jimenez-Gamero M.D. (2013), "Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications", *Fuzzy Sets and Systems*, 219, pp.49-67.
9. Kuang, Y. (1993), "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics", *Academic Press*, Boston.

Ngày Tòa soạn nhận được bài: 03-8-2016; ngày phản biện đánh giá: 06-9-2016; ngày chấp nhận đăng: 13-9-2016)